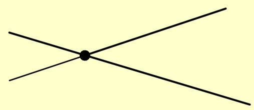
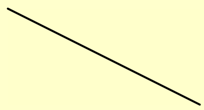
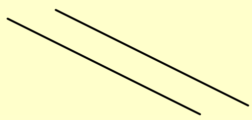
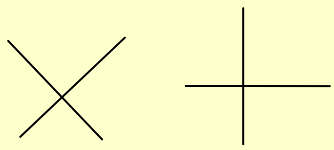
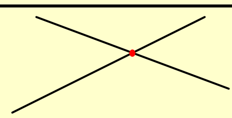
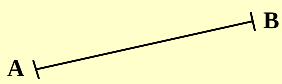
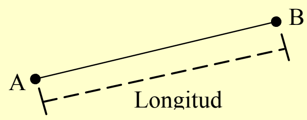
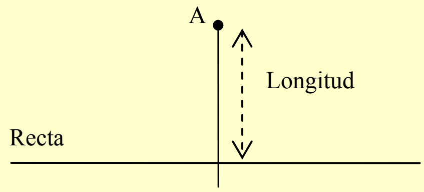
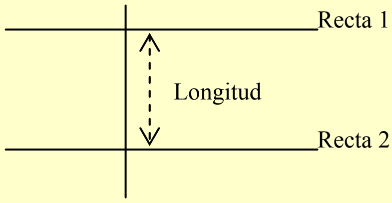
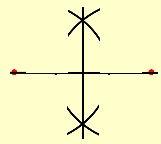
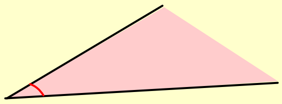
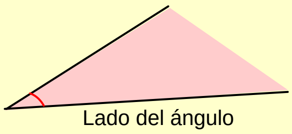
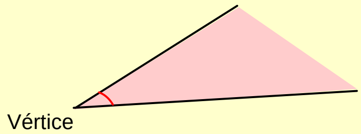
TEMAS 6, 7 Y 8: GEOMETRÍA DEL PLANO Y DEL ESPACIO. SISTEMA DE MEDIDA

1. Conceptos del plano, recta, punto, semiplano, semirrecta, segmento y ángulo.

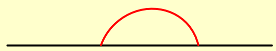
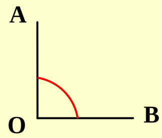
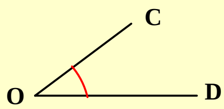
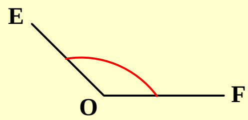
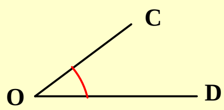
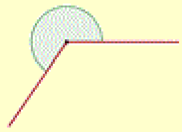
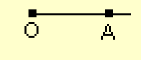
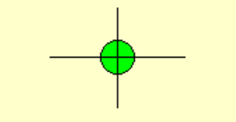
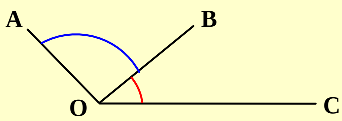
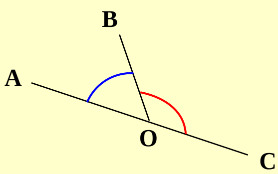
Concepto	Dibujo
Punto. Tiene posición pero no dimensión. Se representa por la intersección de dos rectas.	
Plano. Conjunto infinito de puntos. Superficie sin aristas ni ondulaciones.	
Línea recta. Subconjunto de infinitos puntos del plano en la misma dirección. Es la sucesión de puntos en la misma dirección.	
Rectas paralelas. Líneas que están en el mismo plano y que no se cortan.	
Rectas perpendiculares. Son aquellas que al cortarse forman cuatro ángulos rectos.	
Semiplano. Es cada una de las dos partes que resultan de dividir un plano con una recta.	
Rectas secantes. Rectas que tienen un punto común.	
Segmento. Es la parte de recta comprendida entre dos de sus puntos. Se clasifican en: ***concatenados***, cuando cada uno tiene extremo común con el que le sigue, y ***sucesivos***, que son los segmentos concatenados que están en la misma recta.	

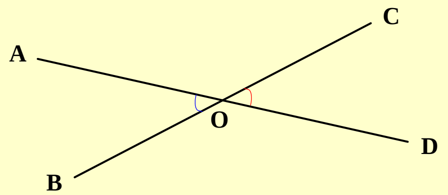
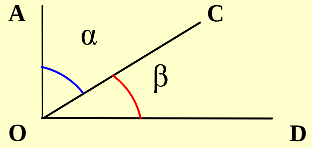
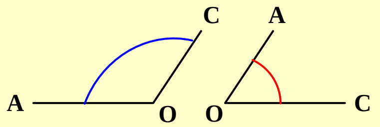
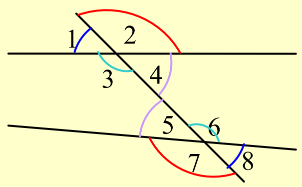
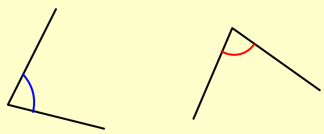
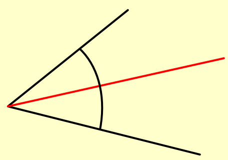
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO “LA INMACULADA” · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Distancia entre dos puntos. Longitud del segmento que los une.	
Distancia de un punto a una recta. Longitud del segmento que resulta de trazar una recta perpendicular desde el punto a la recta.	
Distancia entre dos rectas paralelas. Longitud de segmento que resulta de trazar una recta perpendicular común a las dos rectas y comprendida entre ellas.	
Mediatriz de un segmento. Recta perpendicular trazada desde un punto exterior (al segmento) al punto medio de dicho segmento.	
Ángulo. Porción del plano limitada por dos semirrectas de origen común.	
Lados de un ángulo. Cada una de las semirrectas que forma un ángulo.	
Vértice. Es el punto común de los lados del ángulo.	

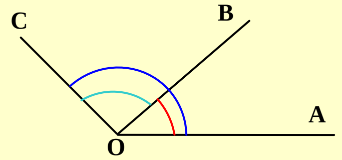
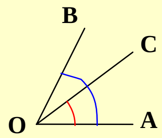
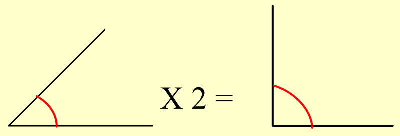
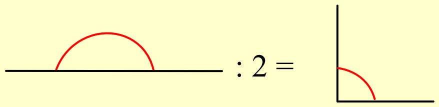
2. Medida de ángulos. Operaciones con medidas de ángulos. Complementario y suplementario.

ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

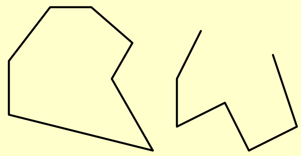
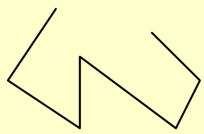
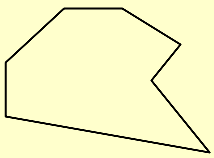
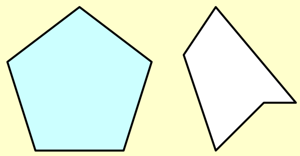
Concepto	Dibujo
Ángulo llano. Son aquellos ángulos cuyos lados en prolongación están en la misma recta que abarcan un semiplano. Sus lados son semirrectas opuestas contenidas en la misma recta. Mide 180º.	
Ángulo recto (AOB). Lo forman dos rectas cuando se cortan perpendicularmente. Mide 90 º y es igual a su adyacente, por tanto el ángulo recto es cada uno de los dos ángulos adyacentes iguales.	
Ángulo agudo (COD). El ángulo menos abierto que el recto. Ángulo que mide más de 0º y menos de 90º.	
Ángulo obtuso (EOF). Ángulo más abierto que el recto y menos que el llano. Ángulo que mide más de 90 grados y menos de 180 grados.	
Ángulo convexo (COD). Ángulo cuyos lados están menos abiertos que los de un llano.	
Ángulo cóncavo (COD). Ángulo cuyos lados están más abiertos que los de un llano.	
Ángulo nulo (COD). Ángulo convexo cuyos lados coinciden.	
Ángulo completo (COD). Ángulo cóncavo cuyos lados coinciden	
Ángulos consecutivos (AOB y BOC). Son los ángulos que tienen el vértice y un lado común.	
Ángulos adyacentes (AOB y BOC). Son ángulos consecutivos (mismo vértice y un lado común) cuyos lados no comunes están en la misma recta. Sumados forman un ángulo de 180º.	

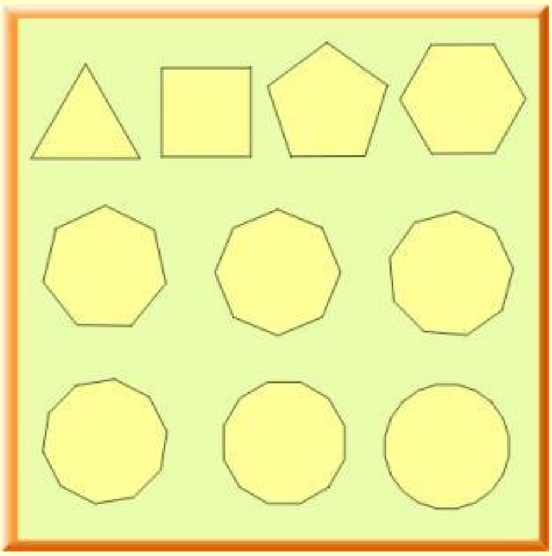
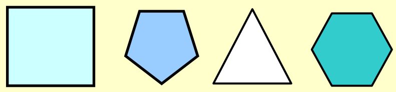
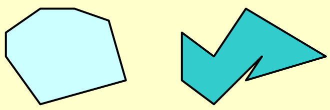
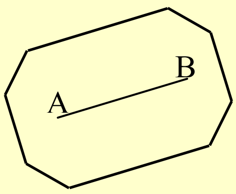
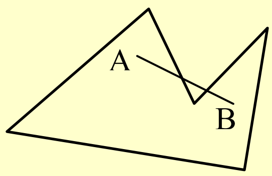
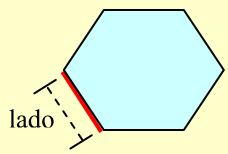
Ángulos opuestos por el vértice. Son dos ángulos no adyacentes formados por dos líneas que se intersecan. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.	
Ángulos complementarios. Son dos ángulos que suman un recto.	
Ángulos suplementarios. Son dos ángulos que suman dos rectos o un ángulo llano.	
Ángulos alternos externos. Son ángulos no consecutivos ni adyacentes que resultan de cortar dos rectas por medio de una secante y que quedan en su parte exterior (1 y 8; 7 y 2).	
Ángulos alternos internos. Son ángulos no adyacentes que resultan de cortar dos rectas por una secante y que quedan en su parte interior (3 y 6; 5 y 4).	
Ángulos iguales. Son aquellos ángulos que superpuestos coinciden.	
Bisectriz de un ángulo. Es la recta que pasa por el vértice del ángulo y forma con los lados dos ángulos iguales.	
Grado. Son las unidades que se utilizan para medir ángulos.	
Grado sexagesimal. Es la medida que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales. Se representa con 1º.	
Minuto sexagesimal. Es la medida que resulta de dividir un grado sexagesimal en 60 partes iguales. 1º = 60'.	
Segundo sexagesimal. Es la medida que resulta de dividir un minuto sexagesimal en 60 partes iguales. Se representa 1' = 60''.	

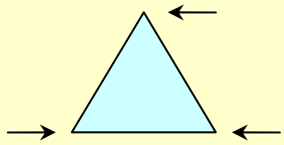
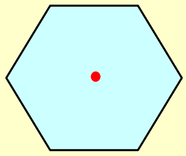
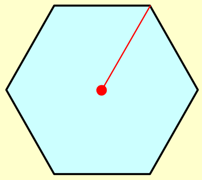
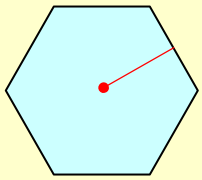
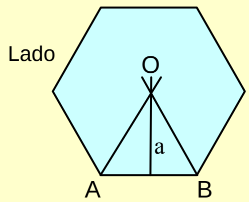
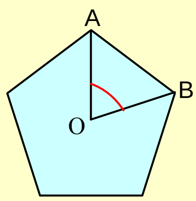
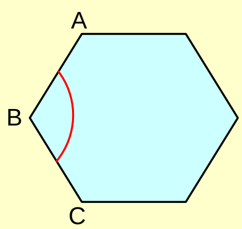
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO “LA INMACULADA” · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Suma de ángulos. Para sumar dos ángulos: Los ponemos consecutivos y el ángulo suma es el determinado por los lados no comunes. Sumamos la amplitud de los ángulos. AOB + BOC = AOC	
Resta de ángulos. Para restar dos ángulos: Los superponemos a partir de un lado común y el ángulo diferencia es el determinado por los lados no comunes. Restamos la amplitud de los grados de los ángulos que nos dan. AOB – AOC = COB	
Multiplicación de un ángulo por un número. Al multiplicar un ángulo por un número, obtenemos otro de amplitud, el producto del número por la amplitud del ángulo dado.	
División de un ángulo por un número. El cociente de un ángulo por un número se obtiene dividiendo la amplitud del ángulo dado por el número.	

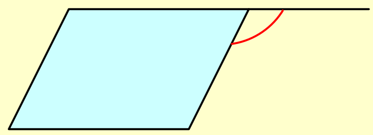
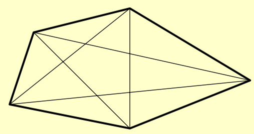
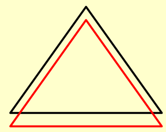
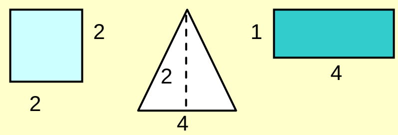
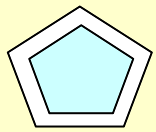
3. Concepto de polígono. Polígonos regulares. Clasificación.

Concepto	Dibujo
Línea poligonal. Línea formada por varios segmentos concatenados que tienen como origen el extremo del segmento anterior.	
Línea poligonal abierta. Línea formada por varios segmentos en el que el primero y el último no llegan a unirse.	
Línea poligonal cerrada. Línea formada por varios segmentos los cuales se unen limitando al polígono. No hay extremos.	
Polígono. Figura plana limitada por una línea poligonal cerrada. **Los polígonos de acuerdo al número de lados se clasifican en:**	

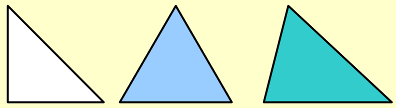
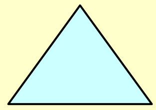
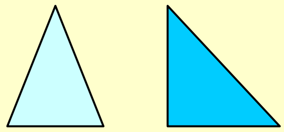
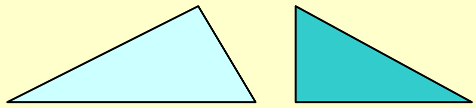
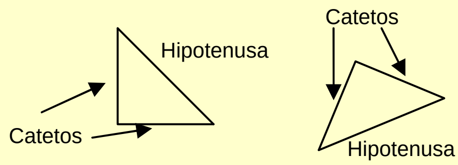
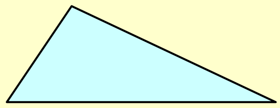
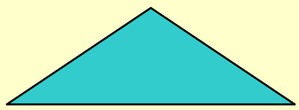
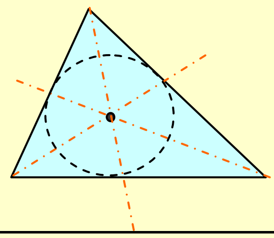
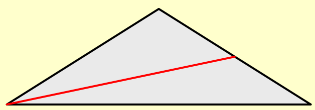
- polígonos de 3 lados se llaman Triángulos. - polígonos de 4 lados se llaman Cuadriláteros. - polígonos de 5 lados se llaman Pentágono. - polígonos de 6 lados se llaman Hexágonos. - polígonos de 7 lados se llaman Heptágonos. - polígonos de 8 lados se llaman Octágonos. - polígonos de 9 lados se llaman Eneágonos. - polígonos de 10 lados se llaman Decágonos. - polígonos de 12 lados se llaman Dodecágonos. - polígonos de 20 lados se llaman Icoságonos Un polígono es **equilátero** si sus lados son iguales. Un polígono es **equiángulo** si los ángulos son iguales. Un polígono es **regular** si es equiángulo y equilátero.	
Polígono regular. Polígono que tiene los lados y los ángulos iguales.	
Polígono irregular. Tiene al menos dos lados o dos ángulos desiguales.	
Polígono convexo. Es el que tiene todos sus ángulos convexos. Todos los ángulos interiores son menores de 180º. Al unir dos puntos cualesquiera del polígono el segmento que resulta es siempre interior al mismo.	
Polígono no convexo (Cóncavo). Es el que tiene algún ángulo cóncavo Es el polígono con al menos un ángulo interior mayor de 180º. Podemos encontrar dos puntos del polígono quedando en su exterior parte del segmento que los une.	
Lado de un polígono. Cada uno de los segmentos que forman o delimitan un polígono.	

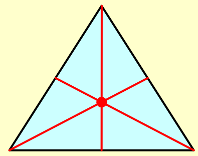
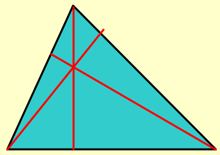
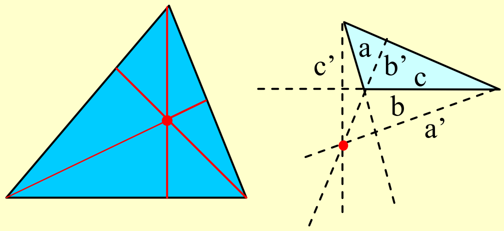
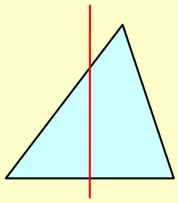
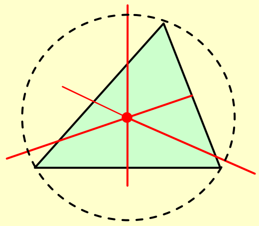
Vértice de un polígono. Es cada uno de los puntos donde se unen dos lados de un polígono.	
Centro de un polígono regular. Punto que está a igual distancia de los vértices del polígono.	
Radio de un polígono regular. Es el segmento que une el centro del polígono con alguno de sus vértices. Lo es también de la circunferencia circunscrita.	
Apotema de un polígono regular. Segmento que une el centro del polígono con el punto medio de alguno de los lados. Es perpendicular al mismo. Es el radio de la circunferencia inscrita.	
Área de un polígono regular. Área del triángulo AOB = (1 x a) / 2 Área del polígono = Área del triángulo AOB multiplicado por el número de lados Es la mitad del producto de su perímetro por la longitud de su apotema A = p x a / 2	
Ángulo central de un polígono regular. Es el ángulo de vértice el centro del polígono y lados dos radios consecutivos del polígono. (AOB) Mide 360/n, siendo n el número de lados del polígono	
Ángulo interior de un polígono. Es un ángulo interior al polígono y formado por dos lados consecutivos (ABC)	

ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Ángulo exterior de un polígono. Es el ángulo exterior al polígono formado por un lado y la prolongación de otro consecutivo	
Perímetro de un polígono. Suma de las longitudes los lados de un polígono	Perímetro = Long 1 + Long 2 + … long N
Diagonal de un polígono. Es el segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono Número de diagonales de un polígono: n x (n - 3) / 2; donde n es el número de lados del polígono.	 $\frac{5 \times (5 - 3)}{2} = 5$
Igualdad de polígonos. Dos polígonos son iguales cuando superpuestos coinciden.	
Polígonos equivalentes. Son polígonos que tienen igual área pero no necesariamente la misma forma.	
Polígonos semejantes. Son aquellos que tienen ángulos iguales y lados proporcionales.	
Suma de ángulos interiores de un polígono convexo. Suma = 180º (n - 2); n = número de lados La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 º La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero de 360 º	Suma = 180º (n - 2) n = número de lados
Valor en los ángulos interiores de un polígono regular. 180º (n - 2)/n; n = número de lados Valor de un ángulo interior de un triángulo es 60º Valor de un ángulo interior de un cuadrado es 90º Valor de un ángulo interior de un pentágono regular es 108º Valor del ángulo central de un pentágono regular 360/5 = 72º La suma de los ángulos exteriores de un polígono es 360 º	180º (n - 2)/n n = número de lados
Clasificación de los Triángulos	

ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Triángulo. Polígono que tiene tres lados.	
Según sus lados:	
Triángulo equilátero. Triángulo que tiene sus tres lados y ángulos iguales.	
Triángulo isósceles. Triángulo que tiene sólo dos lados y dos ángulos iguales, y un ángulo y un lado desigual.	
Triángulo escaleno. Triángulo que no tiene ningún lado y ningún ángulo igual.	
Según sus ángulos:	
Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo interior recto. Puede ser isósceles o escaleno pero nunca equilátero.	
Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos interiores agudos. Puede ser equilátero, isósceles o escaleno.	
Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo interior obtuso. Puede ser isósceles o escaleno, pero nunca equilátero.	
Elementos Notables de un triángulo:	
Incentro. Es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo. Equidista de los tres lados, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita, tangente a los tres lados.	
Mediana de un triángulo. Es el segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.	

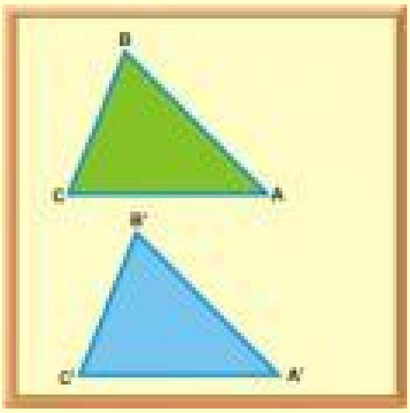
Baricentro. Punto de intersección de las tres medianas.	
Altura de un triángulo. Segmento que va perpendicularmente desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.	
Ortocentro. Es el punto de intersección de las tres alturas.	
Mediatriz de un lado de un triángulo. Es la línea perpendicular en el punto medio del lado.	
Circuncentro. Es el punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita que pasa por los tres vértices del triángulo.	

Triángulos Congruentes

Dos o más triángulos son congruentes cuando superpuestos coinciden en sus tres lados y sus tres ángulos.

Se puede determinar la congruencia de dos triángulos si cumplen con cualquiera de los siguientes criterios:

- Dos triángulos son congruentes si son congruentes dos lados y el ángulo comprendido (LAL)
- Si son congruentes dos ángulos y el lado comprendido (ALA)
- Si los tres lados son congruentes, (LLL)
- Si son respectivamente congruentes un lado, un ángulo adyacente a él y el lado opuesto
- Si son congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de éstos.
- Los triángulos rectángulos son congruentes, si tienen congruentes la hipotenusa y un cateto o la hipotenusa y un ángulo agudo.

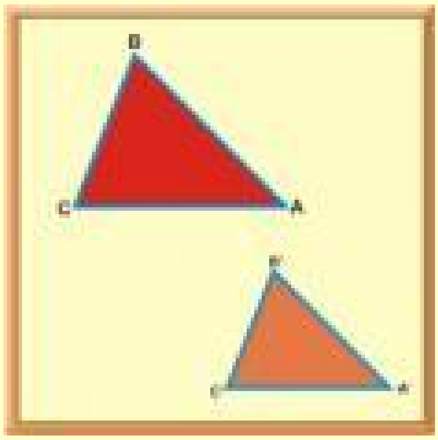


Triángulos Semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos sus lados homólogos son proporcionales entre triángulos semejantes tienen la misma forma pero

Por esta definición tenemos que:

- Dos triángulos congruentes son también semejantes.
- Dos triángulos semejantes a un tercero, son semejantes entre sí.
- Dos triángulos son semejantes, si tienen sus lados ordenadamente paralelos o perpendiculares.

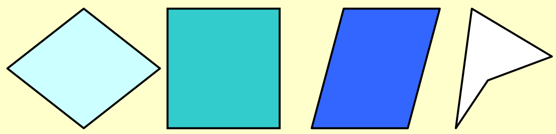


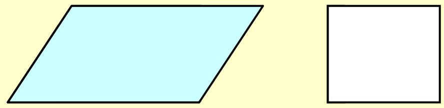
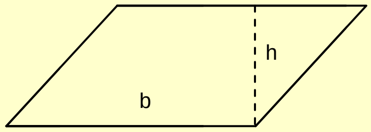
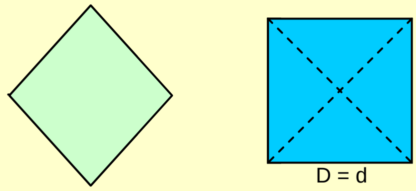
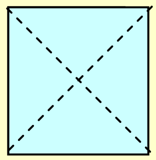
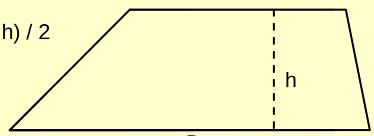
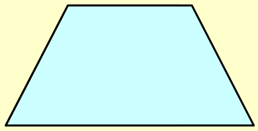
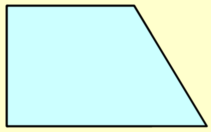
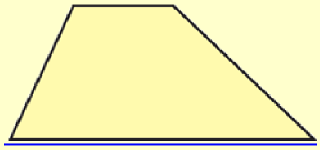
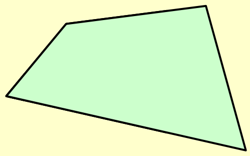
Para determinar si dos triángulos son semejantes, se consideran los siguientes criterios:

- Que dos ángulos de uno sean iguales o congruentes a dos ángulos del otro.
- Que dos lados del uno sean proporcionales a dos lados del otro y los ángulos comprendidos iguales o congruentes.
- Que los tres lados del uno sean proporcionales a los tres lados del otro.

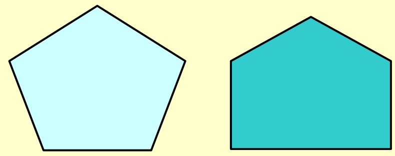
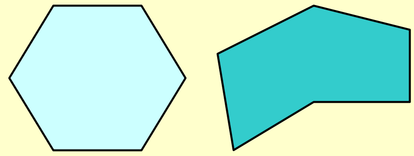
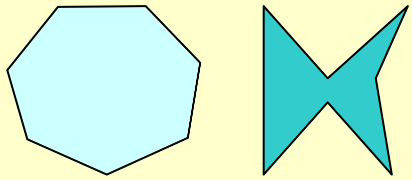
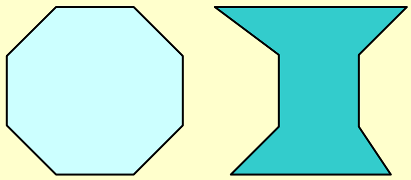
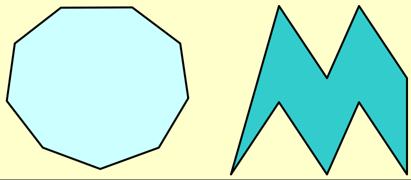
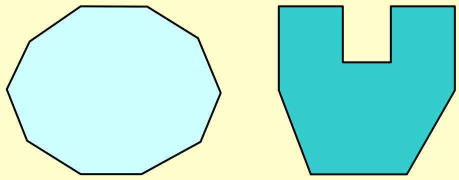
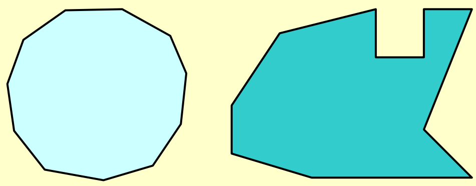
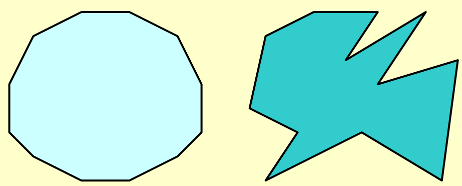
Clasificación de los cuadriláteros convexos:

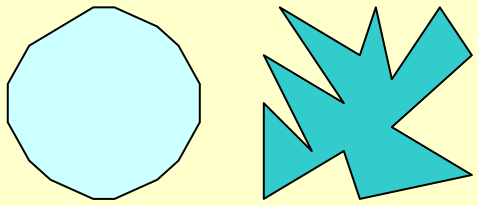
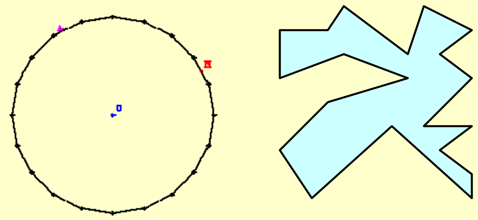
Cuadrilátero. Polígono de cuatro lados.



Paralelogramo. Cuadrilátero que tiene los lados paralelos dos a dos.	
Romboide. Paralelogramo con lados y ángulos contiguos desiguales. Diagonales iguales y no perpendiculares.	
Rectángulo. Paralelogramo que tiene lados desiguales, ángulos rectos y diagonales iguales y no perpendiculares. Área del rectángulo: A = b x h	
Rombo. Paralelogramo cuyos cuatro lados son iguales, ángulos desiguales y diagonales desiguales y perpendiculares. Área del Rombo: A = (D x d) / 2	
Cuadrado. Paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales, ángulos iguales y rectos, diagonales iguales y perpendiculares. Área de cuadrado: A = l x l A = d^2 / 2	
Trapecio. Cuadrilátero que sólo tiene dos lados paralelos.	
Trapecio isósceles. Trapecio cuyos lados no paralelos son iguales.	
Trapecio rectángulo. Trapecio que tiene dos ángulos rectos.	
Trapecio escaleno. Trapecio cuyos dos lados no paralelos son desiguales.	
Trapezoide. Cuadrilátero irregular que no tiene lados paralelos.	

ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Pentágono. Polígono de cinco lados.	
Hexágono. Polígono de seis lados.	
Heptágono. Polígono de siete lados.	
Octógono. Polígono de ocho lados.	
Eneágono. Polígono de nueve lados.	
Decágono. Polígono de diez lados.	
Endecágono. Polígono de once lados.	
Dodecágono. Polígono de doce lados.	

Pentedecágono. Polígono de 15 lados.	
Icodecágono o Icoságono. Polígono de veinte lados.	

4. Medidas de superficie.

SUBMULTIPLOS DEL METRO CUADRADO

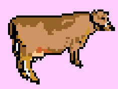
decímetro cuadrado	dm^2	$1\ dm^2 = 0.01\ m^2$
centímetro cuadrado	cm^2	$1\ cm^2 = 0.01\ dm^2$
milímetro cuadrado	mm^2	$1\ mm^2 = 0.01\ cm^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2 = 1.000.000\ mm^2$		

MULTIPLOS DEL METRO CUADRADO

decámetro cuadrado	dam^2	$1\ dam^2 = 100\ m^2$
hectómetro cuadrado	hm^2	$1\ hm^2 = 100\ dam^2$
kilómetro cuadrado	km^2	$1\ km^2 = 100\ hm^2$
$1\ m^2 = 0,01\ dam^2 = 0,0001\ hm^2 = 0,000001\ km^2$		

MEDIDAS AGRARIAS

Para medir superficies de campo, se utilizan las medidas agrarias, cuya unidad es el área. El área corresponde a la superficie de un cuadrado de 10 metros de lado.



hectárea	ha	hm^2
área	a	dam^2
centiárea	ca	m^2

5. Área del polígono.

El área es la medida de la superficie de los polígonos. Esta área se expresa en función de la medida de los lados, las alturas o las diagonales, según el tipo de cuadrilátero.

Área de polígonos regulares:

El área del polígono regular es igual al producto del semiperímetro por la apotema. Para sacar el área de los polígonos regulares se necesitan las siguientes fórmulas para las diferentes figuras:

Área del Cuadrado: Es igual al producto de sus lados o lado al cuadrado.

$A = l \times l$ o $A = l^2$

Área del Rectángulo: Es igual al producto de la base por altura.

$A = b \times h$

Área del Triángulo: Es igual a la mitad del producto de la base por la altura.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Área del Trapecio: Es igual a la semisuma de las bases multiplicado por la altura

$$A = \frac{B \times b}{2} \times h$$

Área del Rombo: Es igual al semiproducto de la diagonal mayor por la diagonal menor

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Área de la Circunferencia: Es igual al cuadrado del radio multiplicado por el valor de PI ($\prod = 3{,}141516$)

$A = r^2 \times \prod$

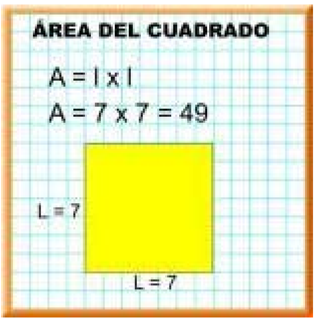
Área de un Polígono: Es igual al semiproducto del perímetro por el apotema.

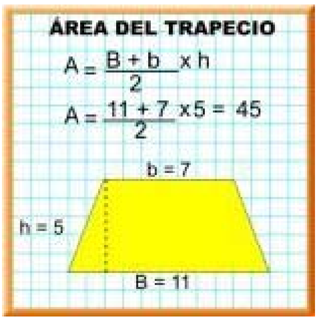
$$A = \frac{p \times ap}{2} = 1/2(n \times l \times ap)$$

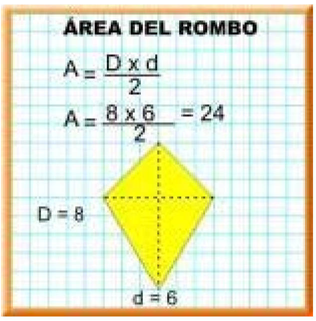
Nota: n, es el número de lados del polígono

Apotema: La apotema es el segmento que va desde el centro del polígono a la mitad de un lado.

ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com







Área de polígonos irregulares

Para sacar el área de cada figura irregular se tienen que dividir en regulares es decir, sacar el área de las figuras regulares y después sumarlas para luego obtener el área total de la figura irregular. Se debe tomar en cuenta que no existen fórmulas determinadas, ya que todas las figuras son muy diferentes.

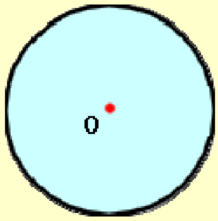
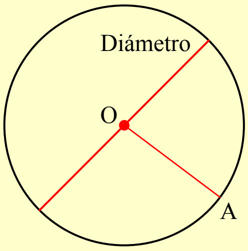
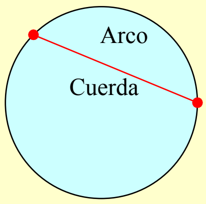
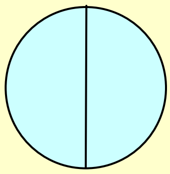
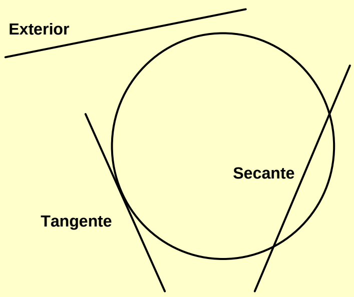
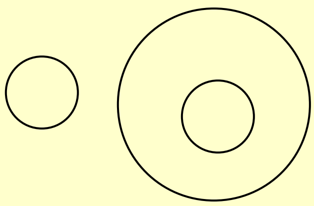
Para conseguir el perímetro de una figura irregular, no se usan fórmulas, sólo se necesita sumar cada uno de los lados de la figura.

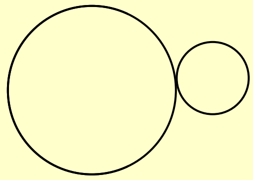
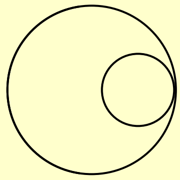
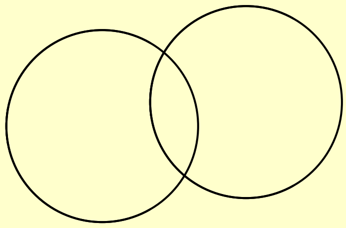
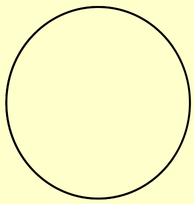
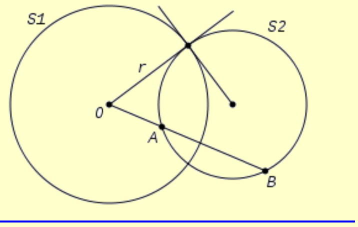
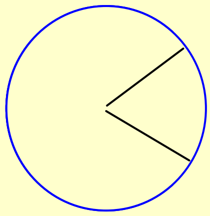
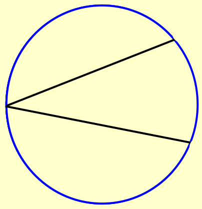
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Por ejemplo, sacar el perímetro de una estrella de cinco picos con 57 cm.

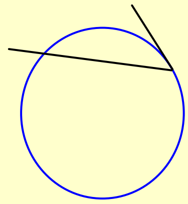
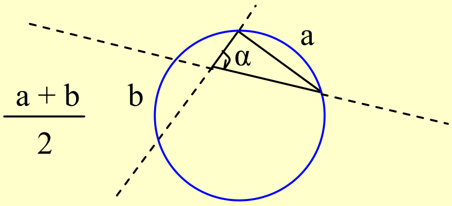
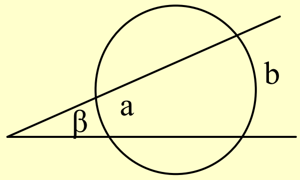
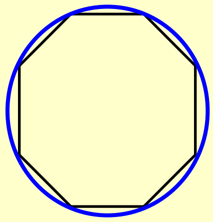
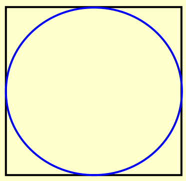
6. Circunferencia. Longitud de una circunferencia. Área del círculo.

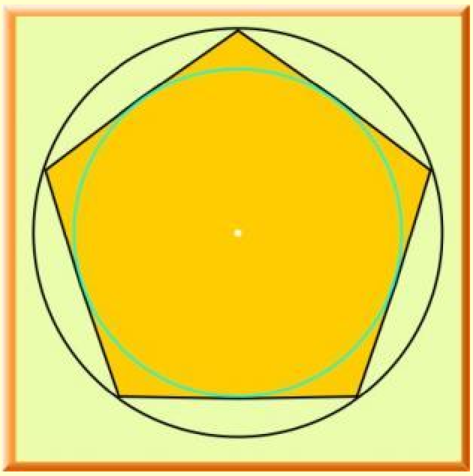
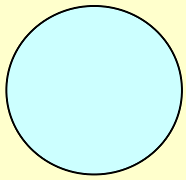
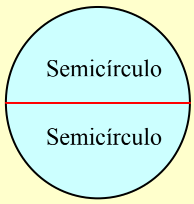
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

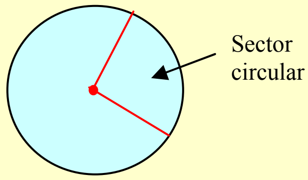
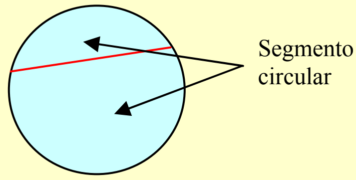
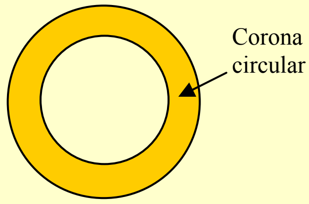
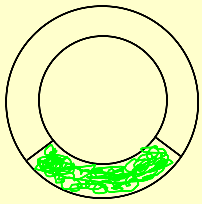
Concepto	Dibujo
Circunferencia. Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno interior llamado centro.	
Centro de una circunferencia. Punto interior del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia (O).	
Radio de una circunferencia. Es el segmento que une el centro de una circunferencia con cualquier punto de la misma (O A).	
Diámetro de una circunferencia. Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. Equivale a dos radios.	
Cuerda. Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.	
Arco de circunferencia. Porción de la circunferencia limitada por dos de sus puntos.	
Semicircunferencia. Cada uno de los arcos en que queda dividida la circunferencia por un diámetro.	
Recta exterior a una circunferencia. Cuando la recta y la circunferencia no tienen ningún punto en común.	
Recta tangente a la circunferencia. Cuando la recta y la circunferencia tienen un punto en común.	
Recta secante a la circunferencia. Cuando la recta tiene dos puntos en común con la circunferencia. La distancia del centro a la recta es menor que el radio.	
Circunferencias exteriores. Cuando todos los puntos de cada una de las circunferencias son exteriores a la otra.	
Circunferencia interior. Cuando todos los puntos de una circunferencia son interiores a la otra.	

Circunferencia tangentes exteriores. Cuando son exteriores y tienen un punto en común.	
Circunferencia tangentes interiores. Cuando una es interior a la otra y tienen un punto en común.	
Circunferencias secantes. Cuando tienen dos puntos comunes.	
Circunferencias concéntricas. Cuando tienen el mismo centro.	
Circunferencias ortogonales: son circunferencias secantes que se cortan de tal manera que las tangentes en cada uno de los puntos comunes son perpendiculares entre sí.	
Ángulo Central. Tiene el vértice en el centro de la circunferencia y mide igual que el arco que abarca.	
Ángulo Inscrito. Formado por dos cuerdas que se cortan en la circunferencia. Mide la mitad del arco que abarca.	

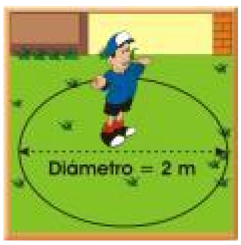
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Ángulo Semiinscrito. Tiene su vértice en la circunferencia, un lado es una cuerda y el otro lado es una tangente a la circunferencia. Mide la mitad del arco que abarca.	
Ángulo Interior. Tiene el vértice en un punto del círculo y mide la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones.	$\hat{\alpha} = \dfrac{a+b}{2}$ 
Ángulo Exterior. Aquel que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados son secantes. Mide la semidiferencia de los arcos que abarca.	 $\hat{\beta} = \dfrac{a+b}{2}$
Longitud de la circunferencia. L = 2 π r.	$L = 2\pi r$
El número Pi (π). Es el número de veces que la circunferencia contiene su diámetro.	$\Pi = L / 2r = L / d$
Polígono inscrito en una circunferencia. Cuando todos los vértices del polígono pertenecen a la circunferencia. Sus lados son cuerdas de esa circunferencia. La circunferencia se dice circunscrita al polígono. Todo polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia.	
Polígono circunscrito a una circunferencia. Cuando todos sus vértices son puntos de la circunferencia y todos los lados del polígono son tangentes a la circunferencia. La circunferencia estará inscrita en el polígono.	

Los polígonos regulares tienen una única circunferencia inscrita y otra circunscrita, y ambas son concéntricas. El centro de ambas circunferencias se llama centro del polígono regular. **Procedimiento para inscribir un polígono regular en una circunferencia:** 1. Con la ayuda de un compás, trazamos una circunferencia y denotamos el centro con la letra " o”. 2. Dividimos la medida de la circunferencia (360°) entre el número de lados del polígono que vamos a elaborar. En este caso construiremos un hexágono regular, que dividimos entre 6. Ejemplo: 360 ÷ 6 = 60° 3. Con el graduador, construimos el ángulo de 360/6 = 60°. 4. Utilizamos una regla, trazamos un segmento entre los puntos A y B. 5. Con abertura del compás igual a la longitud del segmento AB, determinamos los puntos C, D, y E. 6. Unimos con una regla los puntos A, B, C, D y E; y como resultado obtenemos un pentágono regular inscrito en una circunferencia.	
Longitud de un arco de circunferencia. $(2 \pi r) \times n / 360$; n = número de grados que abarca el arco.	$(2 \pi r) \times n / 360$
Círculo (Definición y área). Conjunto de puntos del plano limitados por una circunferencia. La distancia de cualquier punto del círculo al centro de la circunferencia es inferior al radio de la misma. $A = \pi r^2$	
Semicírculo. Es cada una de los partes en las que queda dividido un círculo por un diámetro.	

Sector circular. Es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco que abarcan. Dos radios dividen al círculo en dos sectores circulares.	
Segmento circular (Definición y área). Parte del círculo comprendido entre una cuerda y su arco. Una cuerda limita dos segmentos circulares.	
Corona circular (Definición y área). Es la porción de círculo comprendido entre dos circunferencias concéntricas.	
ZONA CIRCULAR: Es la zona del círculo limitada por dos secantes.	
Trapecio circular (Definición y área). Es la parte de corona circular comprendida en un ángulo central.	

Longitud de la circunferencia y el número "pi"



Analiza la siguiente actividad: Jorge traza en el patio una circunferencia que tiene un diámetro de 2m y la cubre totalmente con una cuerda.

Jorge, luego de cubrir y medir el largo de la cuerda (6,26 metros), se da cuenta que necesitó 3 veces y un poco más la longitud del diámetro; es decir 6 metros y 28 centímetros (6,28).

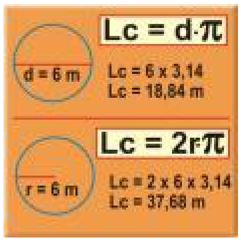
Si dividimos 6,28 m para 2m del diámetro obtenemos como cociente 3,14 m.

Como la longitud de cualquier circunferencia siempre va a ser igual a 3 veces y un poco más el valor de su diámetro, el valor de 3,14 en matemática se designa con la letra griega "pi" (observa el gráfico que sigue).
Si: LC = Longitud de la circunferencia y d = diámetro; entonces la longitud de la circunferencia es igual a diámetro por pi.

Además sabemos que el diámetro de la circunferencia es igual a 2 veces el radio, entonces podemos decir que la longitud de la circunferencia es igual a 2 por radio por pi.

RECUERDA:

El valor de "Pi" (3,14) representa a 3 veces y un poco más la longitud del diámetro de una circunferencia.

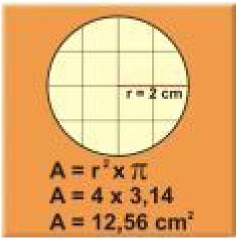


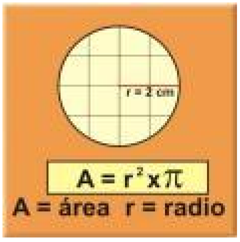
Calculemos la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 6 metros y de una circunferencia cuyo radio es 6 metros.
Observa en la gráfica siguiente como lo hacemos:

Área del círculo

Si tenemos una circunferencia de radio 2 cm. y trazamos una cuadrícula con cuadros de 1 cm, veremos que existen 12 cuadros aproximadamente en la zona circular.
Este número de cuadros representa el área por lo tanto, el área del círculo es igual al producto del radio al cuadrado del círculo por "pi"

Si tenemos una circunferencia de radio 2 cm podemos calcular su área elevando al cuadrado el radio y multiplicándolo por el valor de pi (3,14). Observa el siguiente gráfico.





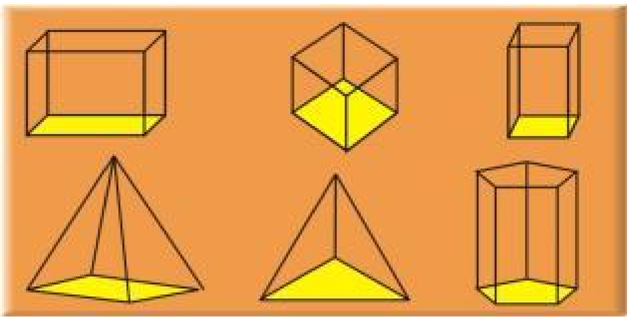
7. Poliedros. Prisma. Pirámide. Cilindro. Cono. Esfera. Áreas y volúmenes.

Poliedros.

El cubo, los volúmenes prismáticos, el tetraedro y las pirámides han sido admirados desde antiguo por la perfección de su geometría y por su atractivo estético. Todos ellos son formas singulares de una familia general de formas en el espacio llamadas poliedros.

Si analizamos las características de los siguientes sólidos geométricos se puede observar que todas las caras de estos sólidos o cuerpos geométricos son planas; por ellos se llaman poliedros.

Un poliedro es un sólido geométrico que tiene solo caras planas.



ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

Clasifiquemos a los poliedros e identifiquemos sus elementos principales:

Todo poliedro que tiene dos bases paralelas formadas por figuras iguales se llaman prismas.

Todo poliedro que tiene una base, sus caras laterales son triángulos y terminan en punta se llaman pirámides. Por tanto:

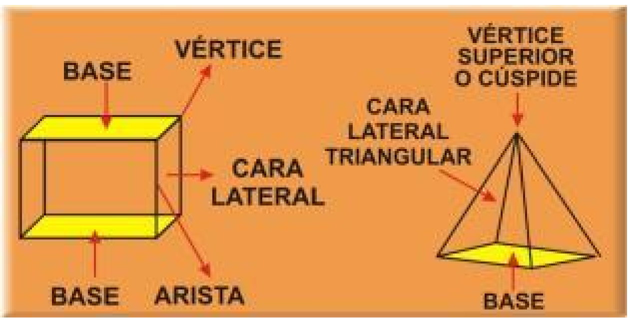
Prisma: poliedro que tiene 2 bases iguales y paralelas.

Pirámides: poliedro que tienen 1 base, sus caras laterales son triángulos y terminan en punta.

Elementos de los poliedros

Los **poliedros** son figuras geométricas cerradas en el espacio delimitadas por cuatro o más **polígonos** planos. En un poliedro se distinguen los siguientes elementos:

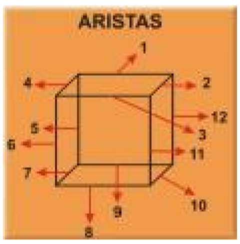
- Las **caras**: cada uno de los polígonos que lo delimitan.
- Las **aristas**: rectas en las que confluyen dos caras adyacentes.
- Los **vértices**: puntos de intersección entre las aristas.
- Los **ángulos poliedros**: formados por tres o más caras, con un vértice común.
- Las **diagonales**: rectas trazadas entre dos vértices de distintas caras.



Número de aristas de un poliedro según la fórmula de Euler Venn

Para calcular el número de aristas de cualquier poliedro, sumamos el número de caras más el número de vértices y al final restamos 2.

Por ejemplo: el número de aristas que tiene un cubo es igual a 12.



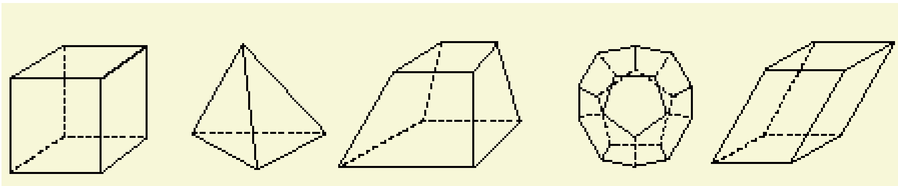
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com

La fórmula para calcular el número de aristas de un poliedro se denomina Fórmula de Euler Venn en honor del descubridor de esta relación.

Nº DE ARISTAS = Nº DE CARAS + Nº DE VÉRTICES -2

Según el número de caras, los poliedros se denominan **tetraedros** (4 caras), **pentaedros** (5), **hexaedros** (6), **heptaedros** (7), **octaedros** (8), **dodecaedros** (12), **icosaedros** (20), etcétera.

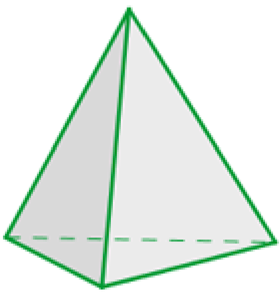
Sólo existen cinco poliedros regulares, cuyas caras son polígonos regulares e iguales: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro regulares.



Ejemplos de poliedros. De izquierda a derecha: cubo, tetraedro, hexaedro no regular, dodecaedro y prisma oblicuo.

Clasificación de poliedros regulares

Tetraedro

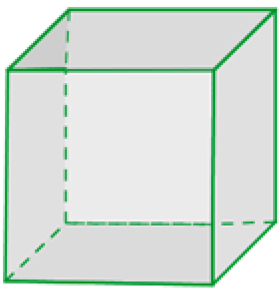


Su superficie está formada por 4 triángulos equiláteros iguales.

Tiene cuatro vértices y cuatro aristas.

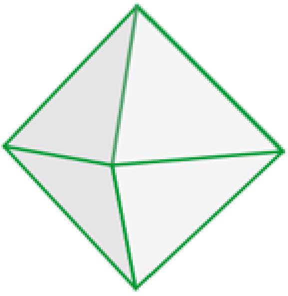
Es una pirámide triangular regular.

Hexaedro o cubo



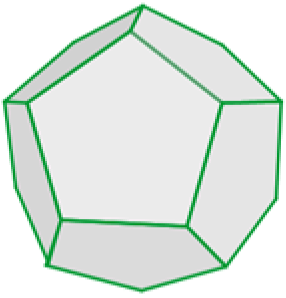
Su superficie está constituida por 6 cuadrados.
Tiene 8 vértices y 12 aristas.
Es un prisma cuadrangular regular.

Octaedro



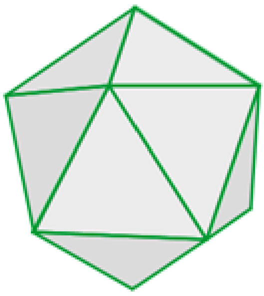
Su superficie consta de ocho triángulos equiláteros.
Tiene 6 vértices y 12 aristas.
Se puede considerar formado por la unión, desde sus bases, de dos pirámides cuadrangulares regulares iguales.

Dodecaedro



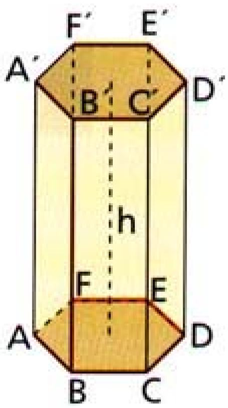
Su superficie consta de 12 pentágonos regulares.
Tiene 20 vértices y 30 aristas.

Icosaedro



Su superficie consta de veinte triángulos equiláteros.
Tiene 12 vértices y 30 aristas.

Prisma



El prisma regular es un cuerpo geométrico limitado por 2 polígonos regulares, llamados bases, y por tantos rectángulos como lados tenga la base.

Se nombran diciendo PRISMA y el nombre del polígono de la base. (Ejemplo: Prisma pentagonal).

Área lateral: es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por la altura (h) del prisma.

AL = P · h

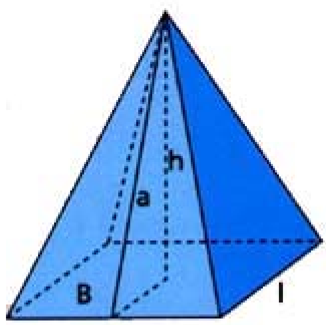
Área total: es igual al área lateral más el área de los polígonos de las 2 bases.

AT = AL + 2 · Ab

Volumen: es igual al área del polígono de la base multiplicado por la altura del prisma.

V = Ab · h

PIRÁMIDE



La pirámide regular es un cuerpo geométrico limitado por un polígono regular, llamado base, y por tantos triángulos como lados tenga la base.

Se nombran diciendo PIRÁMIDE y el nombre del polígono de la base. (Ejemplo: Pirámide cuadrangular).

Área lateral: es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por la altura de una cara lateral (a) de la pirámide y dividido entre 2.

AL = P · a / 2

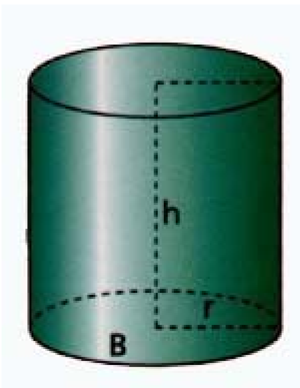
Área total: es igual al área lateral más el área del polígono de la base.

AT = AL + Ab

Volumen: es igual al área del polígono de la base multiplicado por la altura (h) de la pirámide y dividido entre 3.

V = Ab · h / 3

CILINDRO



El cilindro es el cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo al girar en torno a uno de sus lados.

Área lateral: es igual a 2 multiplicado por r por π (pi), el resultado multiplicado por el radio de la base (B) y multiplicado por la generatriz (g) del cilindro.

AL = 2 · π · r · g

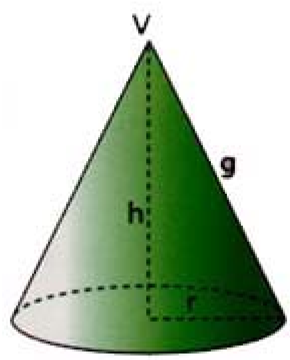
Área total: es igual al área lateral más las áreas de los dos círculos de las bases.

AT = AL + 2 · Ab

Volumen: es igual al área del círculo de la base multiplicado por la altura (h) del cilindro.

V = Ab · h

CONO



El cono es un cuerpo geométrico engendrado por un triángulo rectángulo al girar en torno a uno de sus catetos. Ver revolución cono.

Área lateral: es igual a π (pi) multiplicado por el radio (r) de la base y multiplicado por la generatriz (g) del cono.

$$\mathbf{AL = \pi \cdot r \cdot g}$$

Área total: es igual al área lateral más el área del círculo de la base.

$$\mathbf{AT = AL + Ab}$$

Volumen: es igual al área del círculo de la base multiplicado por la altura (h) del cono y dividido entre 3

$$\mathbf{V = Ab \cdot h / 3}$$

ESFERA

La esfera es un cuerpo geométrico engendrado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Área: es igual a 4 multiplicado por π (pi), y el resultado se multiplica por el cuadrado del radio de la esfera.

$$\mathbf{A = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Volumen: es igual a 4 multiplicado por π (pi), el resultado se multiplica por el cubo del radio de la esfera y lo que resulta se divide entre 3.

$$\boxed{V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3}$$

8. Transformaciones Geométricas

Las transformaciones geométricas son aplicaciones que hacen corresponder unos puntos en el plano con otros para obtener otra figura es decir, es la aplicación que hace pertenecer a cada punto del plano otro punto del plano.

Las transformaciones más comunes son las simetrías, traslaciones, rotaciones y las homotecias. Todas ellas mantienen la forma de las figuras, pero pueden disminuir el tamaño y cambiar la figura de posición.

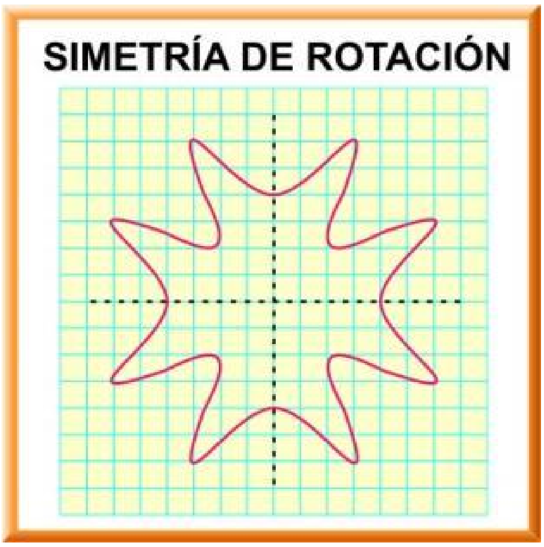
Simetría

La simetría geométrica es la propiedad de un objeto que se presenta cuando las características de forma, tamaño y posición relativa de sus partes, son las mismas en ambos lados de una línea divisora equidistante imaginaria llamada eje de simetría.

Simetría de rotación

Una figura tiene simetría de rotación *n* veces si puede rotarse grados alrededor de un punto (donde *n* es un entero positivo) de modo que la imagen resultante coincida con la figura original

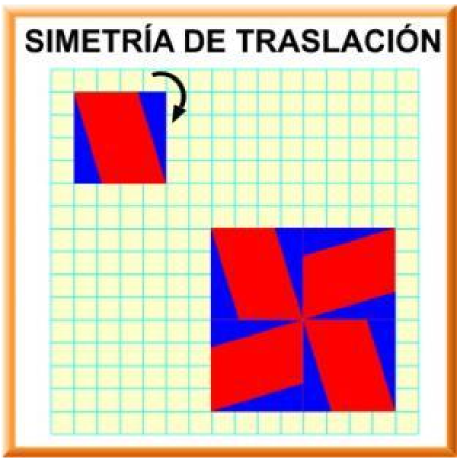
ESCUELA UNIVERSITARIA DIOCESANA DE MAGISTERIO "LA INMACULADA" · Carretera de Murcia s/n · 18010 GRANADA
Tels.: 958 205 861 – 958 205 501 / Fax: 958 287 469 · www.eulainmaculada.com · email: magisterio@eulainmaculada.com



Simetría de traslación

Una figura presenta ***simetría de traslación*** si puede trasladarse de modo que la imagen coincida con la figura original. Las figuras con simetría de traslación necesariamente se repiten de forma infinita; sólo es posible representar una parte finita de la figura.

La traslación es un movimiento que no altera ni el tamaño ni la forma ni la orientación de las figuras.



Tipos de simetrías

Simetrías axiales.-

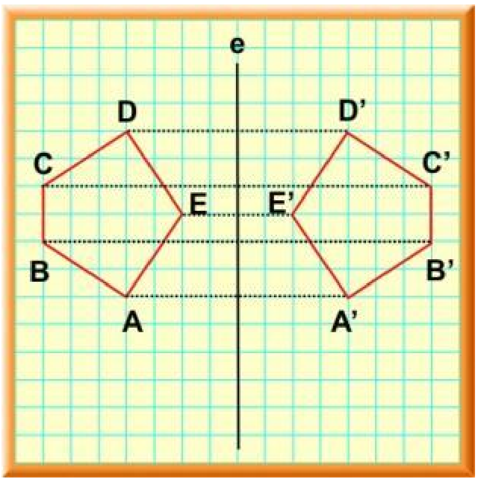
Dos figuras son simétricas cuando al doblar por su eje de simetría coinciden en todos sus puntos.

Dos figuras son simétricas respecto a un eje (llamado eje de simetría) si los puntos homólogos están a la misma distancia del eje y la recta que los une es perpendicular a él.

La simetría axial es un movimiento que no altera ni el tamaño ni la forma de las figuras.

Observaciones:

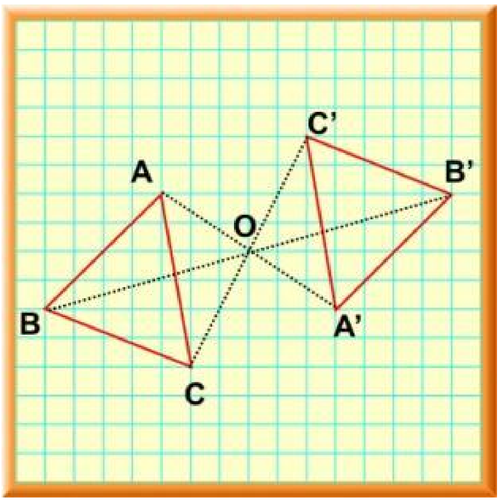
- El simétrico de un punto que pertenece al eje de simetría es el mismo punto.
- El simétrico de un segmento que pertenece al eje de simetría es el mismo segmento.
- Cuando le aplicamos a una figura dos simetrías axiales de ejes paralelos se ha efectuado una ***traslación***.
- Cuando le aplicamos a una figura dos simetrías axiales de ejes no paralelos (se cortan en un punto) se ha efectuado un ***giro***.



simetría axial

Simetrías centrales.-

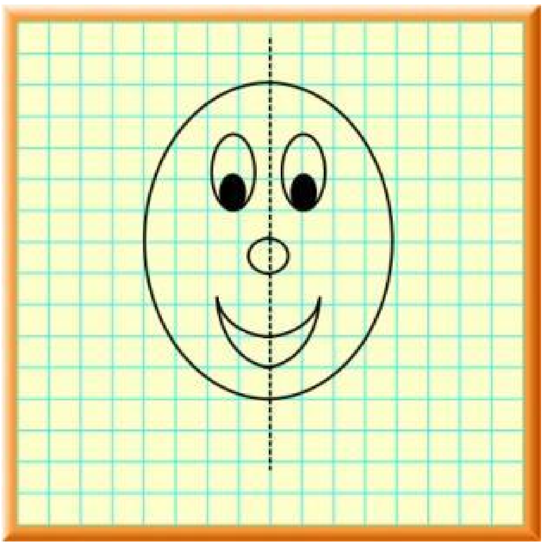
Dos figuras son simétricas respecto a un punto, llamado centro de simetría si sus puntos homólogos equidistan al centro y están en línea recta con él.



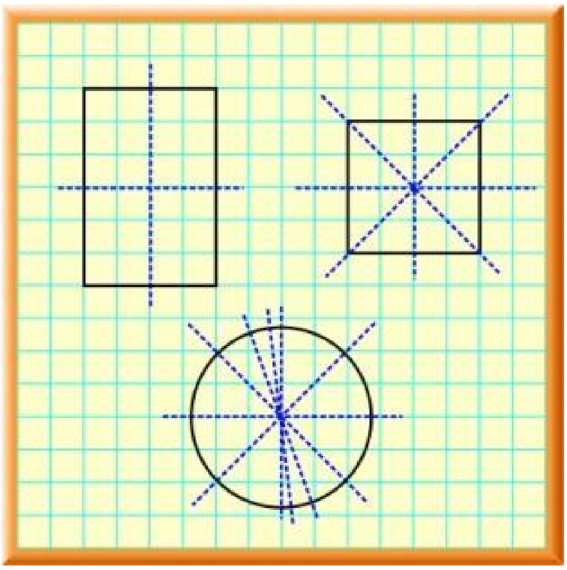
Figuras simétricas

Una ***figura*** se llama ***simétrica*** si existe una recta tal que tomada como eje de simetría transforma a la figura en ella misma.

El ***eje de simetría de una figura*** es una recta que divide a la figura en dos partes iguales, de tal manera que los puntos situados en una parte de la recta tengan su simétrico en la otra.



Hay figuras que tienen varios ejes de simetría. Por ejemplo, un rectángulo tiene dos, un cuadrado cuatro y un círculo infinitos (cualquier recta que pasa por su centro es eje de simetría).



9. <u>Medidas de superficie</u>.

La unidad principal de medida es el metro cuadrado.

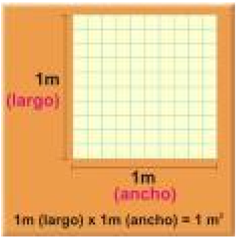
Medidas de superficie

El punto del tema tiene una importante aplicación en la medición de espacios, de figuras, entre otros. Hemos de saber utilizar la unidad de superficie del Sistema Internacional junto con sus múltiplos y submúltiplos.

Por ejemplo, si un agricultor que quiera comprar o vender un terreno necesita conocer la superficie del terreno, o igual si queremos saber la medida de nuestro salón de clase.

Si cercamos un terreno, la cerca representa el **perímetro** del mismo, y el espacio interior es la **superficie** del terreno.

Metro cuadrado



La unidad de las medidas de superficie en el Sistema Internacional de Medidas es el metro cuadrado, que es un cuadrado cuyo lado mide un metro.

Las medidas de superficie tienen dos dimensiones: largo y ancho, por lo que si multiplicamos 1 metro de largo por 1 metro de ancho tendremos como resultado 1 metro cuadrado.

El símbolo del metro cuadrado es **m^2**

Múltiplos

Son unidades de superficie mayores que el metro cuadrado; y son el decámetro cuadrado (**dam^2**), el hectómetro cuadrado (**hm^2**) y el kilómetro cuadrado (**km^2**).

Si multiplicamos 1 decámetro de largo (10 m) x 1 decámetro de ancho (10 m) obtenemos un decámetro cuadrado (**$10\ m \times 10\ m = 100\ m^2$**)

Si multiplicamos 1 hectómetro de largo (100 m) x 1 hectómetro de ancho (100 m) obtenemos un hectómetro cuadrado (**$100\ m \times 100\ m = 10000\ m^2$**)

Si multiplicamos 1 kilómetro de largo (1000 m) x 1 kilómetro de ancho (1000 m) obtenemos un kilómetro cuadrado (**$1000\ m \times 1000\ m = 1000000\ m^2$**)

Submúltiplos

Son unidades de superficie menores que el metro cuadrado; y son el decímetro cuadrado **dm^2**, el centímetro cuadrado **cm^2** y el milímetro cuadrado **mm^2**.

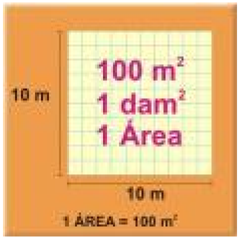
Si multiplicamos 1 decímetro de largo (0,1 m) x 1 decímetro de ancho (0,1 m) obtenemos un decímetro cuadrado (**$0{,}1\ m \times 0{,}1\ m = 0{,}01\ m^2$**)

Si multiplicamos 1 centímetro de largo (0,01 m) x 1 centímetro de ancho (0,01 m) obtenemos un centímetro cuadrado (**$0{,}01\ m \times 0{,}01\ m = 0{,}0001\ m^2$**)

Si multiplicamos 1 milímetro de largo (0,001 m) x 1 milímetro de ancho (0,001) obtenemos un milímetro cuadrado (**0,001 m X 0,001 m = 0,000001 m^2**)

Múltiplos	1 Kilómetro cuadrado (Km^2) = 1'000.000 m^2
	1 hectómetro cuadrado (hm^2) = 10.000 m^2
	1 decámetro cuadrado (dam^2) = 100 m^2
metro cuadrado	
submúltiplos	1 decímetro cuadrado (dm^2) = 0,01 m^2
	1 centímetro cuadrado (cm^2) = 0,0001 m^2
	1 milímetro cuadrado (mm^2) = 0,000001 m^2

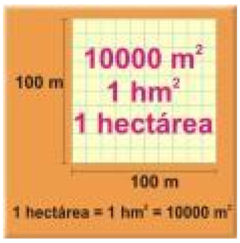
Medidas agrarias



Para medir terrenos se han usado diversas unidades tales como el área, la hectárea, la cuadra, y otras de acuerdo al país, época o sistema de medida. En nuestro país se utiliza la cuadra y la hectárea como unidades comunes.

Vamos a conocer una unidad que no pertenece al Sistema Internacional de Medidas conocida como Área y su múltiplo la Hectárea.

Cuando en un terreno marcamos un cuadrado de 10 m de lado, estamos señalando la unidad agraria conocida como Área.



Así tenemos que **1 área** equivale a **100 m^2** o **1 dam^2**.

Un múltiplo del área muy utilizado es la hectárea (**ha**) que equivale a 100 áreas.

Una hectárea en el Sistema Internacional de Medidas equivale a un hectómetro cuadrado (**1 hm^2**) o **10000 m^2**.

El submúltiplo del área es la centiárea (ca) que es igual a 0,01 áreas y que en Sistema Internacional de Medidas equivale a **1 m^2**

Unidades de masa

Analiza cómo comparamos y calculamos la masa de los objetos: La manzana pesa menos que el teléfono y la máquina de escribir pesa más que el osito de peluche.

Si queremos conocer con exactitud cuál es la masa de cualquier objeto, se utiliza una balanza que expresa esta masa en su unidad principal que se denomina kilogramo masa (kg).

El kilogramo (kg) tiene unidades menores y mayores que este:

UNIDAD	Tonelada Métrica	Kilogramo	gramo	miligramo
SÍMBOLO	t	kg	g	mg

Las unidades de masa como la tonelada métrica (t), el kilogramo (kg) y el miligramo (mg) aumentan o disminuyen siempre de 1000 en 1000.